FOAD-SPIRIT

Fractions irréductibles, PGCD et algorithme d'Euclide

Le PGCD et fractions irréductibles

Un diviseur commun à deux ou plusieurs nombres entiers est un nombre qui divise chacun d'eux.

1 Parmi les diviseurs communs à deux entiers, le plus grand s'appelle le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur).

. Calculons le PGCD de 42 et de 18 :

1. On recherche d'abord tous les diviseurs pour chacun des nombres : Les diviseurs de 42 sont {1,2,3,4,6,7,42}. Ceux de 18 sont {1,2,3,6,9,18}
2. On recherche maintenant les diviseurs communs aux deux listes : en regardant les deux listes, on trouve {1,2,3,6}
3. On prend le plus grand des diviseurs communs => Le PGCD de 42 et 18 est 6.

Pour simplifier et rendre irréductible une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD. $\frac{42 : 6}{18 : 6} = \frac{7}{3}$

2 Lorsque le PGCD de deux nombres entiers vaut 1, alors ils sont premiers entre eux. C'est-à-dire qu'ils n'acceptent qu'un seul diviseur commun : 1.

. Calculons le PGCD de 2 et 5 :

1. On recherche d'abord tous les diviseurs pour chacun des nombres : Les diviseurs de 2 sont {1,2} Ceux de 4 sont {1,5}
2. On recherche maintenant les diviseurs communs aux deux listes : on trouve {1} => Le PGCD de 2 et 5 est 1. Les nombres 2 et 5 sont premiers entre eux.

3 Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

La fraction 14/5 est-elle irréductible ?

. On cherche le PGCD de 14 et 5, soit :

1. On recherche d'abord tous les diviseurs pour chacun des nombres : Les diviseurs de 14 sont {1,2,14} Ceux de 5 sont {1,5}
2. On recherche maintenant les diviseurs communs aux deux listes : en regardant les deux listes, on trouve {1}, donc le PGCD de 14 et 5 est 1. Par conséquent, la fraction est irréductible.

Le PGCD et l'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de calculer le PGCD de deux nombres.

Méthode : on exprime d'abord le plus grand nombre avec un multiple du plus petit et un reste. Puis on exprime le plus petit en fonction du reste précédent et d'un nouveau reste. On continue ce procédé jusqu'à ce que l'on arrive à reste nul. Le dernier reste non nul est alors le PGCD des deux nombres du départ.

. Calcul du PGCD de 556 et 148 :

1. On exprime le plus grand nombre avec un multiple du plus petit : $556 = 148 \times 3 + 112$
2. On prend le diviseur précédent et on l'exprime en fonction du reste : $148 = 112 \times 1 + 36$
3. On prend le diviseur précédent et on l'exprime en fonction du reste : $112 = 36 \times 3 + 4$
4. On prend le diviseur précédent et on l'exprime en fonction du reste : $36 = 4 \times 9 + 0$

Comme le reste est nul, on s'arrête. Le PGCD est le dernier reste non nul soit : 4

Le saviez-vous ?
Deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

FOAD-SPIRIT

Fractions irréductibles, PGCD et algorithme d'Euclide

EXERCICES

1 Rends irréductible la fraction 1020 : 714

1. Trouve le PGCD de 1020 et 714 en appliquant l'algorithme d'Euclide

2. Rends irréductible cette fraction

2 Vrai ou faux ?

99 et 100 sont premiers entre eux ?

Vrai ☐ **Faux** ☐

3 Rends irréductible la fraction 15 : 60

1. Fais la liste de tous les diviseurs de 15 puis de 60

2. Donne les diviseurs communs à 15 et 60, puis donne le PGCD de 15 et 60

3. Rends la fraction 15 : 60 irréductible

4 Vrai ou faux ?

	V	F
• 5 et 3 sont premiers entre eux	☐	☐
• $\frac{15}{3}$ est irréductible	☐	☐
• 23 est un nombre premier	☐	☐
• 21 et 18 sont premiers entre eux	☐	☐

5 Rends irréductibe cette fractions sans calculs ni PGCD

- $\dfrac{10 \times 5 \times 7 \times 3 \times 4 \times 10}{2 \times 10 \times 4 \times 6 \times 10}$

6 Donne le résultat sous forme de fraction irreductible

- $\left(\dfrac{6}{4}\right)^2 - \dfrac{3}{4}$
- $\dfrac{2}{42} - \dfrac{3}{14}$
- $\dfrac{14}{-16} \times \dfrac{(-3)}{32}$

MATHS

FOAD-SPIRIT

Fractions irréductibles, PGCD et algorithme d'Euclide

CORRIGÉS

1 Rends irréductible la fraction 1020 : 714

1. Trouve le PGCD de 1020 et 714 en appliquant l'algorithme d'Euclide

1020 = 714 x 1 + 306 donc PGCD (1020 ; 714) = PGCD (714 ; 306)

714 = 306 x 2 + 102 donc PGCD (714 ; 306) = PGCD (306 ; 102)

306 = 102 x 3 + 0 donc PGCD (306 ; 102) = 102

PGCD (1020 ; 714) = 102

2. Rends irréductible cette fraction

On divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD,

soit : $\frac{1020 : 102}{714 : 102} = \frac{10}{7}$

2 Vrai ou faux ?

99 et 100 sont premiers entre eux ?

Vrai	Faux
☑	☐

Le saviez-vous ? Deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

La fraction 99/100 est donc irréductible.

3 Rends irréductible la fraction 15 : 60

1. Fais la liste de tous les diviseurs de 15 puis de 60

. Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5 et 15

. Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60

2. Donne les diviseurs communs à 15 et 60, puis donne le PGCD de 15 et 60

. Les diviseurs communs à 15 et 60 sont : 1, 3, 5, 15

. PGCD (15 ; 60) = 15

3. Rends la fraction 15 : 60 irréductible

. $\frac{15 : 15}{60 : 15} = \frac{1}{2}$

4 Vrai ou faux ?

	V	F
5 et 3 sont premiers entre eux PGCD (5 ; 3) = 1	☑	☐
$\frac{15}{3}$ est irréductible PGCD (15 ; 3) = 3 donc ≠ 1	☐	☑
23 est un nombre premier 23 ne peut être divisé que par 1 et lui-même.	☑	☐
21 et 18 sont premiers entre eux PGCD (21 ; 18) = 3 donc ≠ 1	☐	☑

Le saviez-vous ? Les vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

5 Rends irréductibe cette fractions sans calculs ni PGCD

- $\frac{\cancel{10} \times 5 \times 7 \times 3 \times \cancel{4} \times \cancel{10}}{2 \times \cancel{10} \times \cancel{4} \times 6 \times \cancel{10}}$

$= \frac{5 \times 7 \times 3}{2 \times 6} = \frac{5 \times 7 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3} \times 2}$

$= \frac{35}{4}$

6 Donne le résultat sous forme de fraction irreductible

- $\left(\frac{6}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{36}{16} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$
- $\frac{2}{42} - \frac{3}{14} = \frac{2}{42} - \frac{3 \times 3}{14 \times 3} = \frac{-7}{42} = -\frac{1}{6}$
- $\frac{14}{-16} \times \frac{(-3)}{32} = \frac{42}{512}$ => PGCD (42 ; 512) = 2 => $\frac{42 : 2}{512 : 2} = \frac{21}{256}$