FOAD-SPIRIT

Résolution d'équations à deux inconnues

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (x ; y) qui vérifient simultanément les deux équations.
Un système à 2 inconnues peut admettre 0, 1 ou une infinité de solutions. Nota : en classe de troisième, on se limite à des systèmes admettant une seule solution.
Pour résoudre ce type de problème vous pouvez utiliser les 3 méthodes que nous détaillons ci-dessous...

Généralités

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

est un système de deux équations à deux inconnues (x ; y).

1. Méthode de résolution par substitution

1 $x + 2y = 1$
2 $3x + y = -1$

est un système de deux équations à deux inconnues (x ; y).

Dans la méthode par substitution, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. Cette méthode fonctionne dans tous les cas de figure. Voyons comment faire...

Première étape : Exprimons x en fonction de y dans l'équation 1 ($x + 2y = 1$), soit : 3 $x = 1 - 2y$

Etape suivante : on remplace x par 1 - 2y dans la deuxième équation afin de se retrouver avec une équation à une inconnue, soit :
2 $3x + y = -1 \Rightarrow 3(1 - 2y) + y = -1$

Etape suivante : on isole y, soit : $3(1 - 2y) + y = -1$
=> $3 - 6y + y = -1$ => $y = 4/5$

Etape suivante : on remplace y par sa valeur (4/5) dans l'équation 3 soit : $x = 1 - 2y$ => $x = 1 - 2(4/5)$ $= -3/5$ => $x = -3/5$

Etape suivante: on présente les résultats, soit :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x = -3/5 \\ y = 4/5 \end{cases}$$

Etape suivante : on vérifie que la solution obtenue, c'est à dire le couple (-3/5 ; 4/5) est bien la solution du système de départ.
On remplace x et y par leur valeur dans une des équations de départ, soit : $x + 2y = 1$ => $-3/5 + 2(4/5) = 1$ => $-3/5 + 8/5 = 1$ => $5/5 = 1$ Vérification => réussie, le couple (-3/5 ; 4/5) est bien la solution de l'équation.

Etape suivante : on conclut : La solution du système est le couple (-3/5 ; 4/5).

2. Méthode de résolution par combinaison

La méthode par combinaison est plus délicate à mettre en oeuvre que la méthode pas substitution. Voyons néanmoins comment faire...

Première étape : on observe les 2 équations afin de savoir comment éliminer une des deux inconnues. On remarque que : si l'on multiplie par 3 la première équation et que l'on soustrait les deux équations, alors les x vont disparaître :

$$\boxed{1 \times 3 - 2}$$

A. soit : 1 $\times 3$ => $(x + 2y = 1) \times 3 = 3x + 6y = 3$

B. soit $(3x + 6y = 3)$ - 2

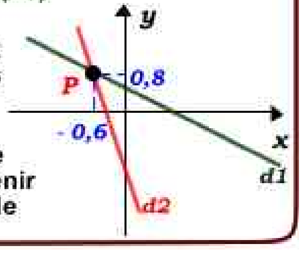
$$\begin{array}{rl} & 3x + 6y = 3 \\ - & 3x + y = -1 \\ \hline & 0x + 5y = 4 \end{array} \Rightarrow y = 4/5$$

Deuxième étape : on remplace y par sa valeur (4/5) dans la première équation pour trouver x, soit : $x + 2y = 1$ => $x + 2(4/5) = 1$ => $x = -3/5$

3. Méthode interprétation graphique

Le principe consiste à résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues, en considérant l'intersection de deux droites comme étant la solution du système.

1 $x + 2y = 1$ | $y = (-x + 1) / 2$ (d1)
2 $3x + y = -1$ | $y = -3x - 1$ (d2)



La solution du système est le couple des coordonnées du point P (-0,6 ; 0,8).
Attention, la résolution graphique d'un système ne permet pas toujours d'obtenir une valeur exacte du couple solution.

FOAD-SPIRIT

Résolution d'équations à deux inconnues

EXERCICES

1 Résous ce problème en utilisant la méthode par substitution

A la pâtisserie, Lilou achète 2 pains au chocolat et 4 croissants et paie 5 €. Dans la même pâtisserie achète le même jour 5 pains au chocolat et 3 croissants et paie 6,9 €.
Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat ?

2 Résous le système par la méthode par combinaison

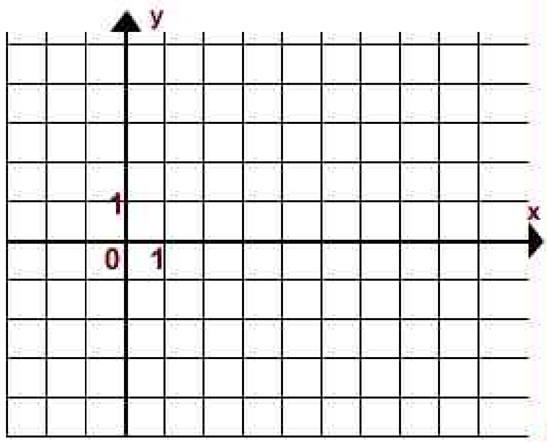
3 Résous graphiquement ce système

$$x - y = 3$$

$$-2x + y = -3$$

x	0	4
y = ...	....	....

x	0	4
y = ...	....	....



FOAD-SPIRIT

Résolution d'équations à deux inconnues

CORRIGÉS

1 Résous ce problème en utilisant la méthode par substitution

A la pâtisserie, Lilou achète 2 pains au chocolat et 4 croissants et paie 5 €. Dans la même pâtisserie achète le même jour 5 pains au chocolat et 3 croissants et paie 6,9 €.
Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat ?

On note p les pains au chocolat et c les croissants, soit :

1 $2p + 4c = 5$

2 $5p + 3c = 6,9$

Résolution par la méthode par substitution

Première étape : Exprimons p en fonction de c dans l'équation 1 $2p + 4c = 5$, soit : $p = \frac{5 - 4c}{2}$ 3

Etape suivante : on remplace p par 5 - 4c dans la 2ème équation : $5p + 3c = 6,9 \Rightarrow 5\left(\frac{5-4c}{2}\right) + 3c = 6,9$
et on isole c, soit : $12,5 - 10c + 3c = 6,9 \Rightarrow -7c = -5,6 \Rightarrow c = 0,8$

Etape suivante : on remplace c par sa valeur (0,8) dans l'équation 3 : $p = \frac{5 - 4c}{2} \Rightarrow p = \frac{5 - 4 \times 0,8}{2} = 0,9$

Le croissant vaut 0,8 € et le pain au chocolat 0,9 €.

2 Résous le système par la méthode par combinaison

1 $8x - 6y = -8$

2 $-2x + 8y = 28$

On multiplie par 4 la 2ème équation et on l'additionne avec à la 1ère pour éliminer les x.

2 $\times 4 \Rightarrow -8x + 32y = 112$

$$\begin{array}{rl} & 8x - 6y = -8 \\ + & -8x + 32y = 112 \\ \hline & 0x + 26y = 104 \end{array} \Rightarrow y = \frac{104}{26} = \frac{52}{13}$$

on remplace maintenant y par sa valeur (52/13) dans la première équation pour trouver x,
soit : $8x - 6y = -8 \Rightarrow 8x - 6\left(\frac{52}{13}\right) = -8 \Rightarrow x = \frac{-104 + 312}{104} = 2$

La solution du système est le couple $\left(2; \frac{52}{13}\right)$.

3 Résous graphiquement ce système

$x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$ (d1)

$-2x + y = -3 \Rightarrow y = 2x - 3$ (d2)

x	0	4
y = x - 3 (d1)	-3	1

x	0	4
y = 2x - 3 (d2)	-3	5

La solution du système est le couple des coordonnées du point P (0 ; -3).