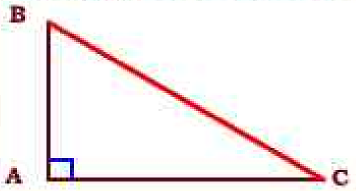
FOAD-SPIRIT

Théorème de Pythagore, réciproque, contraposée et relations trigonométriques

Le théorème de Pythagore

D'après le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des autres côtés.

Triangle ABC rectangle en A



Théorème de Pythagore

$$\underbrace{BC^2}_{\text{Carré de l'hypoténuse}} = \underbrace{AB^2 + AC^2}_{\text{Somme des carrés des autres côtés}}$$

Réciproque

Dans un triangle, si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Carré de l'hypoténuse

SI $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **ALORS**

le triangle ABC est rectangle

Contraposée

La contraposée permet de justifier qu'un triangle n'est pas rectangle. Si le carré du plus long côté n'est pas égal à la somme des carrés des autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

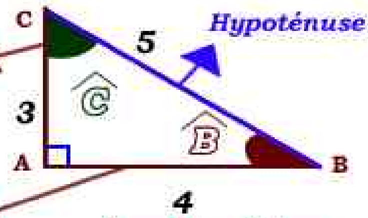
SI $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ **ALORS**

le triangle ABC n'est pas rectangle

Relations trigonométriques dans un triangle

. Côté adjacent à l'angle $\hat{C}$
. Côté opposé à l'angle $\hat{B}$

. Côté opposé à l'angle $\hat{C}$
. Côté adjacent à l'angle $\hat{B}$



Avec l'angle C

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{CA}{CB}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{CB}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{CA}$$

Application

On recherche l'angle $\hat{c}$ grâce aux côtés :

. $\cos \hat{c} = \frac{CA}{CB} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ ➡ $\hat{c} = 53{,}1°$ (environ)

. $\sin \hat{c} = \frac{AB}{CB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ ➡ $\hat{c} = 53{,}1°$ (environ)

. $\tan \hat{c} = \frac{AB}{CA} = \frac{4}{3} = 1{,}33$ ➡ $\hat{c} = 53{,}1°$ (environ)

On recherche le côté CA grâce à l'angle $\hat{c}$:

. $\cos \hat{c} = \frac{CA}{CB}$ => $CA = CB \times \cos \hat{c} = 5 \cos 53{,}1° = 3$ (arrondi)

. $\tan \hat{c} = \frac{AB}{CA}$ => $CA = \frac{AB}{\tan \hat{c}} = \frac{4}{\tan 53{,}1°} = \frac{4}{1{,}33} = 3$ (arrondi)

Propriétés

Pour tout angle aigu x, on a :

. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

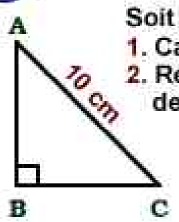
. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ avec $x \neq 90°$

FOAD-SPIRIT

Théorème de Pythagore, réciproque, contraposée et relations trigonométriques

EXERCICES

1 Calcule au centième près

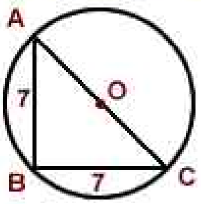


Soit le triangle ABC isocèle rectangle en B,
1. Calculez BC et AB arrondi au centième près.
2. Retrouvez l'hypothénuse grâce au théorème de Pythagore en arrondissant au centième près

2 Calcule à 0,001 près

- sin (28°) = ...
- Tan (45°) = ...
- cos(56°) = ...
- cos (90°) = ...
- sin (90°) = ...
- cos (60°) = ...
- sin (30°) = ...
- cos (54°) = ...
- tan (48°) = ...
- sin (10°) = ...
- cos (30°) = ...

3 Coche la bonne réponse



1. Quelle est la nature de ce triangle ?

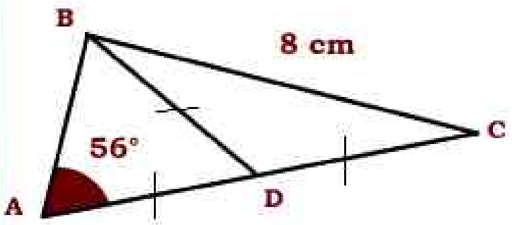
☐ équilatéral ☐ isocèle ☐ rectangle

2. Quelle est la valeur de AC au dixième près?

☐ 7 ☐ 5,9 ☐ 9,9

4 Sans calculatrice, calcule sin x et tan x sachant que cos x = 0,8

5 Calcule AB au dixième près



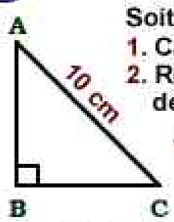
Aide : consulte l'annexe pour prouver que ce triangle est rectangle.

FOAD-SPIRIT

Théorème de Pythagore, réciproque, contraposée et relations trigonométriques

CORRIGES

1 Calcule au centième près



Soit le triangle ABC isocèle rectangle en B,
1. Calculez BC et AB arrondi au centième près.
2. Retrouvez l'hypothénuse grâce au théorème de Pythagore en arrondissant au centième près

1a. La somme des angles d'un triangle = 180°.
Le triangle ABC étant isocèle et rectangle en B, les angles A et C sont égaux, soit 90 : 2 = 45°.

1b. $\cos \widehat{c} = \frac{BC}{AC}$ => BC = AC x $\cos \widehat{c}$ ➡ BC = 10 x cos 45° = 7,07 cm

1c. $\sin \widehat{c} = \frac{AB}{AC}$ => AB = AC x $\sin \widehat{c}$ ➡ AB = 10 x sin 45° = 7,07 cm

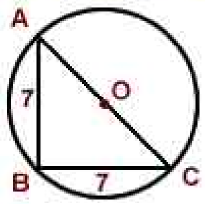
2. Application du théorème de Pythagore, soit $AC^2 = BA^2 + BC^2$

$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = \sqrt{7{,}07^2 + 7{,}07^2} = 9{,}998...$ soit 10 cm.

2 Calcule à 0,001 près

- sin (28°) = 0,469
- Tan (45°) = 1
- cos(56°) = 0,559
- cos (90°) = 0
- sin (90°) = 1
- cos (60°) = 0,5
- sin (30°) = 0,5
- cos (54°) = 0,588
- tan (48°) = 1,111
- sin (10°) = 0,174
- cos (30°) = 0,886

3 Coche la bonne réponse



1. Quelle est la nature de ce triangle ?

☐ équilatéral ☑ isocèle ☑ rectangle

- AB=BC donc isocèle
- [AC] est le diamètre du cercle et A est un point de ce cercle, donc c'est un triangle rectangle.

2. Quelle est la valeur de AC au dixième près?

☐ 7 ☐ 5,9 ☑ 9,9

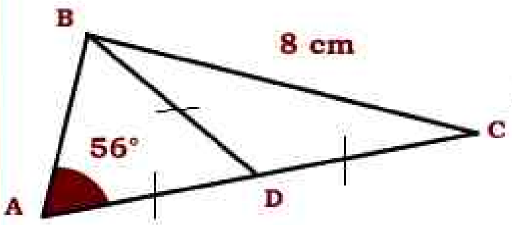
L'hypothénuse est toujours supérieure à la valeur des côtés.

4 Sans calculatrice, calcule sin x et tan x sachant que cos x = 0,8

- On sait que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$ donc cos x = 0,6.
- On sait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{0{,}3}{0{,}4}$

=> tan x = 0,75

5 Calcule AB au dixième près



- Le triangle ABC est rectangle en B car la médiane BD vaut la moitié du côté BC auquel elle est relative. Par conséquent, on peut appliquer la trigonométrie.
- On a donc $\tan \widehat{A} = \frac{BC}{BA}$ => $AB = \frac{BC}{\tan \widehat{A}} = \frac{8}{\tan 56°} = 5{,}4$ cm.

Aide : consulte l'annexe pour prouver que ce triangle est rectangle.

FOAD-SPIRIT

Triangle rectangle ?

ANNEXE

Le triangle rectangle

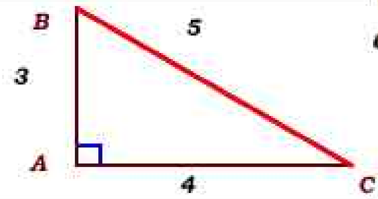
Il existe différentes manières de démontrer qu'un triangle est rectangle.
Nous allons voir la démonstration par les côtés, par les angles, par la médiane, par le cercle circonscrit et par le demi-cercle.

1 Démonstration par les côtés

Le triangle ABC est rectangle en A car

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

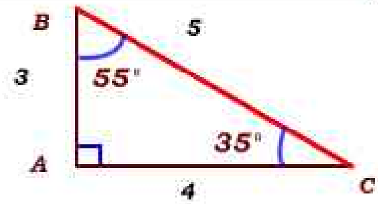
$5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = 9 + 16 \Rightarrow 25 = 25$



2 Démonstration par les angles

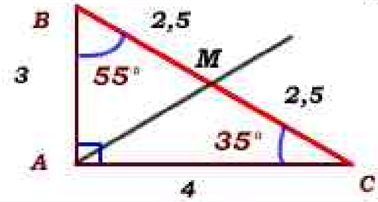
Le triangle ABC est rectangle en A car

$\widehat{A} = 180° - (55° + 40°) = 90°$



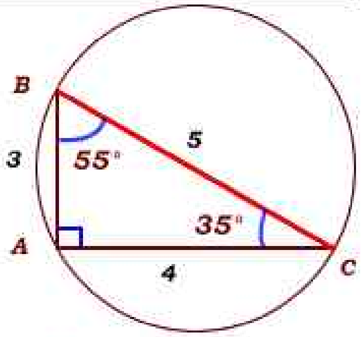
3 Démonstration par les médianes

Le triangle ABC est rectangle en A car la médiane AM vaut la moitié du côté BC auquel elle est relative.



4 Démonstration par le cercle circonscrit

Le triangle ABC est rectangle en A car son hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle.



5 Démonstration par le demi-cercle

Le triangle ABC est rectangle en A car il est inscrit dans un demi-cercle. En effet, un des côtés du triangle (ici, l'hypoténus) est le diamètre.