



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités, arbres, expériences aléatoires à deux épreuves

Langage et savoir de base

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît à l'avance l'ensemble des résultats (ou issues) possibles.
 - Jeux de dés, la loterie, le tirage de jetons ou de boules contenus dans une urne sont des expériences aléatoires.
- L'univers est l'ensemble de tous les résultats (ou issues) possibles. Ainsi, lorsque l'on lance un dé, l'ensemble des issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Un événement élémentaire ne comporte qu'une possibilité. Ainsi, "obtenir le chiffre 2" en lançant un dé correspond à un événement élémentaire. "Obtenir le chiffre 3" correspond à un autre événement élémentaire.
- Un événement est une partie de l'univers, il est constitué par une ou plusieurs issues de l'expérience. Ainsi, lors d'un lancement de dé, "obtenir un chiffre impair" correspond aux issues : 1, 3, 5.
- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. 0 équivaut à un événement impossible et 1 à un événement certain.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1. Ainsi, la somme de toutes les issues d'un lancement de dé :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$
- Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les issues sont équiprobables. Dans ce cas, on peut calculer la probabilité d'un événement grâce à la formule suivante : $\frac{\text{nombre d'issues de l'événement}}{\text{nombre total d'issues}}$
 - Exemple : lors du lancement d'une pièce de monnaie non truquée, il y a autant de chances d'obtenir pile que face. Considérons l'événement X "obtenir pile", $p(X) = 1/2$: Il y a une issue correspondant à l'événement (pile) et il y a deux issues possible au total (pile et face).

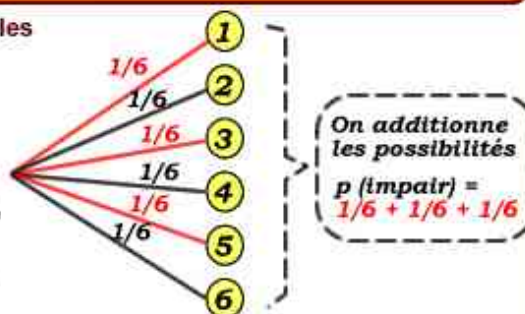
Arbre pondéré ou arbre des possibles

Pour calculer la probabilité d'un événement, on additionne les possibilités figurant sur les branches de l'arbre pondéré.

Exemple : On lance un dé cubique.

- Quel est le nombre d'issues possibles ?
 - il y a 6 faces différentes, donc 6 issues possibles.
- Quels sont les événements possibles ?
 - Il y a 6 événements possibles : "obtenir un", "obtenir 2", "obtenir 3", "obtenir 4", "obtenir 5", "obtenir 6".
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre impair ?

$$p(\text{obtenir un chiffre impair}) = p(\text{obtenir 1}) + p(\text{obtenir 3}) + p(\text{obtenir 5}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2.$$



Événements particuliers

- Un événement est dit impossible si sa probabilité vaut 0 (c'est-à-dire qu'il ne se produira jamais).
 - Dans le lancement d'un dé cubique, l'événement A : "obtenir 7" est impossible et $p(A) = 0$
- Un événement est dit certain si sa probabilité vaut 1 (c'est-à-dire qu'il se produira obligatoirement).
 - la probabilité qu'un homme meurt un jour est dit certain et vaut 1 (un jour et de manière certaine, cet événement se produira).
 - Dans le lancement d'un dé cubique, l'événement A : "obtenir un nombre inférieur ou égal à 6" est certain et $p(A) = 1$.
- Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Lorsque l'on lance une pièce en l'air les événements "avoir pile" et "avoir face" sont incompatibles.
- Un événement et son contraire sont incompatibles. Donc la somme de leurs probabilités vaut 1. Le contraire d'un événement A se note non A, donc : $p(A) + p(\text{non } A) = 1$. On peut également l'écrire : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
 - Exemple : lors d'un lancé de dé cubique, on calcule l'événement contraire à A ("obtenir 1") => c'est-à-dire : ne pas obtenir A, donc : $p(\text{non } A) = 1 - p(A) = 1 - 1/6 = 5/6$.



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités, arbres, expériences aléatoires à deux épreuves

EXERCICES

1 Loterie



La probabilité de tomber sur une case de cette roue de loterie est équiprobable.

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur une case ?

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur le 3 ?

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur le rouge ?

. Quelle est la probabilité de tomber sur une autre couleur que le vert ?

2 Petit déjeuner



Au petit déjeuner, George a le choix entre du café, du thé ou un chocolat. Si l'on prend au hasard, la probabilité de prendre l'une ou l'autre de ces boissons est de $\frac{1}{3}$.

. Quelle est la probabilité de ne pas prendre de café ?

3 Météo à Paris



La probabilité qu'il fasse beau demain à Paris est de $\frac{7}{10}$.

Si aujourd'hui il a plu, quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ?

5 Alphabet !



Soit une urne contenant les 26 lettres de l'alphabet. La probabilité d'obtenir une lettre est de $\frac{1}{26}$.

. Quelle est la probabilité de sortir une voyelle ?

. Quelle est la probabilité de ne pas sortir une voyelle ?

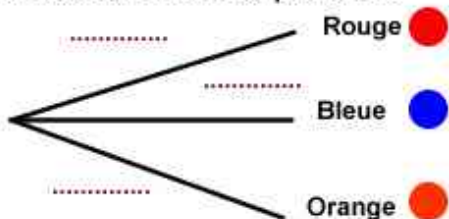
4 Les boules !



Un clown jongle avec 2 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules oranges. La probabilité qu'il fasse tomber une boule est de $\frac{1}{8}$.

. Quelle est la probabilité que ce soit une boule bleue qui tombe ?

. Complète cet arbre pondéré à 3 branches décrivant les situations possibles.



6 Bataille !



Soit un jeu de 52 cartes.

. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

. Quelle est la probabilité de tirer une reine ?



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités, arbres, expériences aléatoires à deux épreuves

CORRIGES

1 Loterie



La probabilité de tomber sur une case de cette roue de loterie est équiprobable.

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur une case ? Il s'agit d'un événement impossible => p(non case) = 0

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur le 3 ?

Cette roue comporte 12 cases.

a. la probabilité de tomber sur le 3 vaut 1/12.

b. La probabilité de ne pas tomber sur le 3 est :

1 - 1/12 = 11/12 => p(non 3) = 11/12.

. Quelle est la probabilité de ne pas tomber sur le rouge ?

Il y a 4 cases rouges.

p(rouge) = 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 = 4/12 = 1/3

. Quelle est la probabilité de tomber sur une autre couleur que le vert ?

Il y a 2 cases vertes.

a. La probabilité de tomber sur le vert vaut

p(vert) = 1/12 + 1/12 = 2/12 = 1/6

b. La probabilité de ne pas tomber sur le vert vaut :

p(non vert) = 1 - 1/6 = 5/6

4 Les boules !

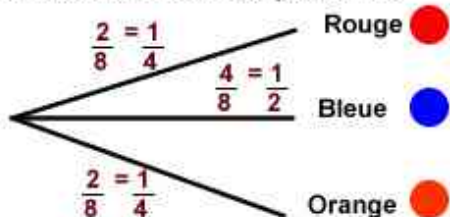


Un clown jongle avec 2 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules oranges. La probabilité qu'il fasse tomber une boule est de 1/8.

. Quelle est la probabilité que ce soit une boule bleue qui tombe ?

Il y a 4 boules bleues et 8 au total. p(bleue tombe) = 4/8.

. Complète cet arbre pondéré à 3 branches décrivant les situations possibles.



2 Petit déjeuner



Au petit déjeuner, George a le choix entre du café, du thé ou un chocolat. Si l'on prend au hasard, la probabilité de prendre l'une ou l'autre de ces boissons est de 1/3.

. Quelle est la probabilité de ne pas prendre de café ?

p (café) = 1/3 . Donc, p (non café) = 1 - 1/3 = 2/3

3 Météo à Paris



La probabilité qu'il fasse beau demain à Paris est de 7/10.

Si aujourd'hui il a plu, quelle est la probabilité qu'il pleuve demain ?

. p (beau demain) = 7/10

. p (non beau demain) = 1 - 7/10 = 3/10

5 Alphabet !



Soit une urne contenant les 26 lettres de l'alphabet. La probabilité d'obtenir une lettre est de 1/26.

. Quelle est la probabilité de sortir une voyelle ?

Il y a 6 voyelles, donc p(voyelle) = 6/26.

. Quelle est la probabilité de ne pas sortir une voyelle ?

p (non voyelle) = 1 - 6/26 = 20/26.

6 Bataille !



Soit un jeu de 52 cartes.

. Combien y a-t-il d'issues possibles ? Il y a 52 issues possibles.

. Quelle est la probabilité de tirer une reine ?

Il y a 4 reines et 52 cartes. donc p(reine) = 4/52 = 1/13.



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités, arbres, expériences aléatoires à deux épreuves

Expériences aléatoires à deux épreuves

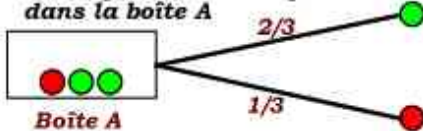
Dans une expérience à plusieurs épreuves, la probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin qui mène à cet événement.

Exemple 1 : On tire d'abord une boule dans la boîte A et on note sa couleur. Ensuite, on tire une boule dans la deuxième boîte B et on note la couleur.

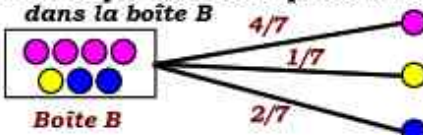
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule jaune ?



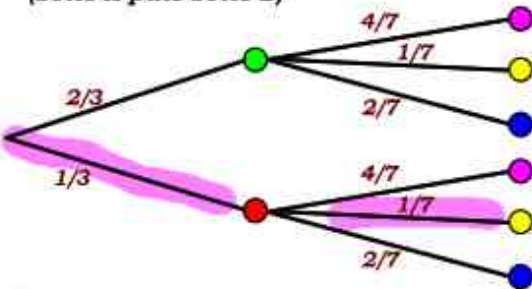
1- Arbre pondéré correspondant au tirage dans la boîte A



2- Arbre pondéré correspondant au tirage dans la boîte B



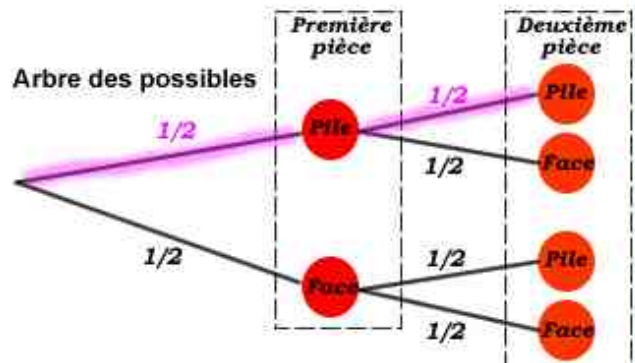
3- Arbre pondéré correspondant aux 2 tirages (boîte A puis boîte B)



Réponse : La probabilité d'obtenir le rouge et le jaune = au produit des probabilités rencontrées le long du chemin qui mène à cet événement. $\Rightarrow p(\text{rouge, jaune}) = 1/3 \times 1/7 = 1/21$.

Exemple 2 : on lance l'une après l'autre deux pièces de monnaie.

Quelle est la probabilité d'obtenir le côté pile pour chacune des pièces ?

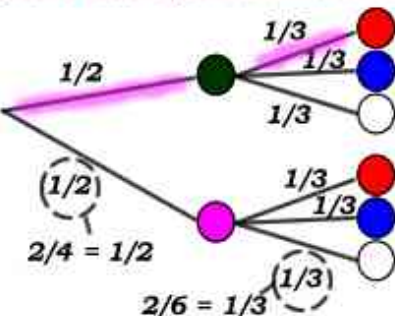


Réponse : La probabilité d'obtenir pile pour les deux pièces = au produit des probabilités rencontrées le long du chemin qui mène à cet événement. $\Rightarrow p(\text{pile, pile}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Exemple 3 : on fait tourner les deux roues du jeu arc-en-ciel. On fait tourner la roue bicolore en premier puis la tricolore.



Quelle est la probabilité d'obtenir le vert et le rouge ?



Réponse : La probabilité d'obtenir le vert et le rouge = au produit des probabilités rencontrées le long du chemin qui mène à cet événement. $\Rightarrow p(\text{vert, rouge}) = 1/2 \times 1/3 = 1/6$



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités,
arbres, expériences aléatoires
à deux épreuves

EXERCICES

1 A vos couleurs !



Ce peintre possède 3 tubes de peinture : un rouge, un jaune et un bleu. Il pioche au hasard et successivement, deux tubes.

. Construis un arbre pondéré décrivant les possibilités.

. Quelle est la probabilité d'obtenir du jaune puis du bleu ?

. Quelle est la probabilité d'obtenir du vert en mélangeant les couleurs tirées ?

. Quelle est la probabilité de ne pas avoir de jaune ?

2 Bienvenue chez dédédé



On lance 2 dés à 6 faces successivement.

. Quelle est la probabilité d'avoir un 1 et 2.

. Quelle est la probabilité d'obtenir un double.

. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 chiffres distincts.

. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 et 5

. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 5.

3 Tu me fends le coeur !



On tire au hasard et successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

. Quelle est la probabilité d'obtenir un trèfle et un roi ?

4 Fastoche !

On lance deux pièces monnaie bien équilibrée successivement.

Quelle est la probabilité d'avoir un côté pile et un côté face ?



FOAD-SPIRIT



Probabilités : généralités,
arbres, expériences aléatoires
à deux épreuves

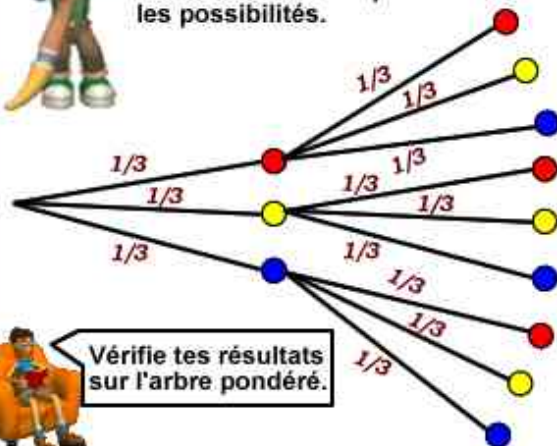
CORRIGES

1 A vos couleurs !



Ce peintre possède 3 tubes de peinture : un rouge, un jaune et un bleu. Il pioche au hasard et successivement, deux tubes.

Construis un arbre pondéré décrivant les possibilités.



Vérifie tes résultats sur l'arbre pondéré.

Quelle est la probabilité d'obtenir du jaune puis du bleu ?

$$p(\text{jaune puis bleu}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir du vert en mélangeant les couleurs tirées ?

Il s'agit d'additionner la probabilité d'avoir jaune puis bleu avec la probabilité d'avoir bleu puis jaune.

$$p(\text{jaune et bleu}) = p(\text{vert}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Quelle est la probabilité de ne pas avoir de jaune ?

$$p(\text{non jaune puis non jaune}) \text{ soit } \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$p(\text{non jaune}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3 Tu me fends le coeur !



On tire au hasard et successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir un trèfle et un roi ?

Il y a 4 rois et 8 cartes de trèfle.

$p(\text{trèfle et roi}) = p(\text{trèfle puis roi}) + p(\text{roi puis trèfle})$

$$p(\text{trèfle et roi}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

2 Bienvenue chez dédè



On lance 2 dés à 6 faces successivement.

Quelle est la probabilité d'avoir un 1 et 2.

Il y a 6 faces sur un dé et les issues sont équiprobables. Donc : $P(1 \text{ puis } 2) + P(2 \text{ puis } 1)$

$$p(1 \text{ et } 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir un double.

Avec 2 dés, il y a 36 issues différentes (6x6). Les doubles possibles sont : 11, 22, 33, 44, 55 et 66. Soit 6 possibilités parmi 36.

$$p(\text{double}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir 2 chiffres distincts.

Cela revient à dire toutes les issues sauf les doubles = $p(\text{non double})$.

$$p(2 \text{ chiffres distincts}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 et 5

$$P(3 \text{ puis } 5) + P(5 \text{ puis } 3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$p(3 \text{ et } 5) = \frac{1}{18}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 5.

Les combinaisons possibles : 32, 23, 41, 14
=> 4 possibilités sur 36 = $4/36 = 1/9$

On aurait également calculer ainsi :

$$p(3 \text{ puis } 2) + p(2 \text{ puis } 3) + p(4 \text{ puis } 1) + p(1 \text{ puis } 4)$$

$$\Rightarrow p(\text{somme de } 5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow p(\text{somme de } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

4 Fastoche !

On lance deux pièces monnaie bien équilibrée successivement.

Quelle est la probabilité d'avoir un côté pile et un côté face ?

Il s'agit d'additionner la probabilité d'avoir pile puis face avec la probabilité d'avoir face puis pile, soit :

$$p(\text{pile et face}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$