MATHS

FOAD-SPIRIT

Racines carrées : calculer, simplifier, développer et résoudre l'équation $x^2=a$

Le PGCD et fractions irréductibles

La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le seul nombre positif dont le carré vaut a. Exemples :

- $\sqrt{16} = 4$ car 4 est le seul nombre positif dont le carré = 16 ($4^2 = 16$),
- $\sqrt{64} = 8$ car 8 est le seul nombre positif dont le carré = 64 ($8^2 = 64$).

Nota : La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Propriétés : a et b désignent des nombres positifs avec b différent de 0.

Propriétés indispensables pour simplifier les fractions.

1. $\sqrt{a^2} = a$
   - . $\sqrt{3^2} = 3$
   - . $\sqrt{25^2} = 5$
2. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
   - . $\sqrt{3 \times 6} = \sqrt{3} \times \sqrt{6}$
   - . $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$
3. . $(\sqrt{a})^2 = a$
   - . $(\sqrt{3})^2 = 3$
   - . $(\sqrt{25})^2 = 5$
4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
   - . $\sqrt{\dfrac{6}{5}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

Attention,

. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Le saviez-vous ?

$\sqrt{1} = 1$

Exemples de simplification

. $A = \sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

. $B = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

. $C = 3\sqrt{196} = 3\sqrt{14^2} = 3 \times 14 = 42$

. $D = \dfrac{14\sqrt{121}}{\sqrt{49}} = \dfrac{14\sqrt{11^2}}{\sqrt{7^2}} = \dfrac{14 \times 11}{7} = 2 \times 11 = 22$

. $E = \sqrt{25} + \sqrt{27} = \sqrt{5^2} + \sqrt{3^2 \times 3} = 5 + 3\sqrt{3}$

. $F = \sqrt{28} - \sqrt{25} = \sqrt{2^2 \times 7} - \sqrt{5^2} = 2\sqrt{7} - 5$

Simplification

Pour simplifier des racines carrées, il est indispensable de connaître les carrés parfaits suivants :

A apprendre par coeur

$2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$;
$7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$;
$11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$.

Racines carrées et équation $x^2 = a$

L'équation $x^2 = a$, admet 0, 1 ou 2 solutions selon la valeur de a.
Pour résoudre ce genre d'équation, il faut isoler le carré, c'est-à-dire le mettre d'un côté ou de l'autre du signe égal.

- $x^2 - 7 \Rightarrow x^2 = 7$. L'équation admet 2 solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$. En effet, $(\sqrt{7})^2 = 7$ et $(-\sqrt{7})^2 = 7$.
- $9 + x^2 \Rightarrow x^2 = -9$. L'équation admet 0 solution. En effet, la racine carré d'un nombre négatif (-9) n'existe pas.
- $3x^2 = 0$. L'équation admet 1 solution : 0
- $x^2 / 2 = 27 \Rightarrow x^2 = 2 \times 27 = 54$. L'équation admet 2 solutions :
  $x^2 = (\sqrt{54})^2 = (\sqrt{6 \times 9})^2 = (\sqrt{6 \times 3^2})^2 = (3\sqrt{6})^2$
  $\Rightarrow$ $x = 3\sqrt{6}$ et $x = -3\sqrt{6}$

FOAD-SPIRIT

Racines carrées : calculer, simplifier, développer et résoudre l'équation $x^2=a$

EXERCICES

1 Complète

- $\sqrt{27}$ = ...
- $\sqrt{.........}$ = 4^2
- $-\sqrt{64}$ = ...
- $\sqrt{(-16)^2}$ = ...
- $\sqrt{10^8}$ = ...
- $\sqrt{\dfrac{121}{256}}$ = ...
- $\left[.......... \times \sqrt{8}\right]^2 = 32$
- $-\sqrt{16^2}$ = ...
- $\sqrt{\dfrac{(11)^2}{32}}$ = ...
- $\sqrt{4} + \sqrt{16}$ = ...

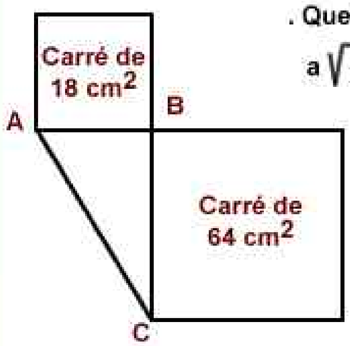
2 Complète ces développements

- $\left[6 - 2\sqrt{9}\right]^2 = 36 - 2 \times .... \times 2\sqrt{9} + \left[2\sqrt{9}\right]^2 = 36 - 72 + ... = -24$
- $\left[2 + 2\sqrt{27}\right]^2 = 4 + ... \sqrt{27} + \left[2\sqrt{27}\right]^2 = 4 + ... \sqrt{3} + 108 = 112 + 24\sqrt{3}$

3 Résous ces équations

- $x^2 = 9$; solution(s) = ...
- $x^2 = 27$; solution(s) = ...
- $x^2 + 2 = 2$; solution(s) = ...
- $x^2 - 12x + 36 = 0$; solution(s) = ...
- $-4x^2 + 12 = -5x^2$; solution(s) = ...
- $x^2 = x$; solution(s) = ...

4 Résous ce problème



. Quelles sont les valeurs de AB ; BC et AC ? Donne la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.

MATHS

FOAD-SPIRIT

Racines carrées : calculer, simplifier, développer et résoudre l'équation $x^2=a$

CORRIGES

1 Complète

- $\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3^2} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{256} = 4^2$
- $-\sqrt{64} = -8$
- $\sqrt{(-16)^2} = 16$
- $\sqrt{10^8} = 10^4$
- $\sqrt{\dfrac{121}{256}} = \dfrac{11}{16}$
- $\left[2 \times \sqrt{8}\right]^2 = 32$
- $-\sqrt{16^2} = -16$
- $\sqrt{\dfrac{(11)^2}{32}} = \dfrac{11}{\sqrt{2 \times 4^2}} = \dfrac{11}{2\sqrt{2}}$
- $\sqrt{4} + \sqrt{16} = 6$

2 Complète ces développements

- $\left[6 - 2\sqrt{9}\right]^2 = 36 - 2 \times 6 \times 2\sqrt{9} + \left[2\sqrt{9}\right]^2 = 36 - 72 + 12 = -24$
- $\left[2 + 2\sqrt{27}\right]^2 = 4 + 2 \times 2 \times 2\sqrt{27} + \left[2\sqrt{27}\right]^2 = 4 + 24\sqrt{3} + 108 = 112 + 24\sqrt{3}$

3 Résous ces équations

- $x^2 = 9$; solution(s) = 3 et - 3

  $x2 = \sqrt{3 \times 3^2} = 3\sqrt{3}$
- $x^2 = 27$; solution(s) = $3\sqrt{3}$ et $-3\sqrt{3}$

  $x^2 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0$
- $x^2 + 2 = 2$; solution(s) = 0

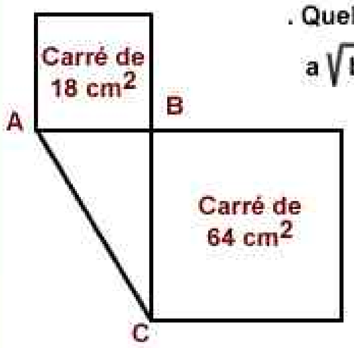
Identité remarquable $(x - 6)^2$

- $x^2 - 12x + 36 = 0$; solution(s) = 6 et -6

  $-4x^2 + 5x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 < 0$
- $-4x^2 + 12 = -5x^2$; solution(s) = pas de solution

  $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$
- $x^2 = x$; solution(s) = 0 et 1

4 Résous ce problème



. Quelles sont les valeurs de AB ; BC et AC ? Donne la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.

. $AB = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$ cm.

. $BC = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ cm.

. $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\left[3\sqrt{2}\right]^2 + 8^2} = \sqrt{18 + 64} = \sqrt{82}$ cm.